Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$
3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :
   $$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2 ; 4]$, on a l'encadrement :
   $$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25.$$
   En déduire l'encadrement :
   $$1 \leqslant I \leqslant 2.$$