TS **EXPONENTIELLE** feuille 320 a

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, par

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

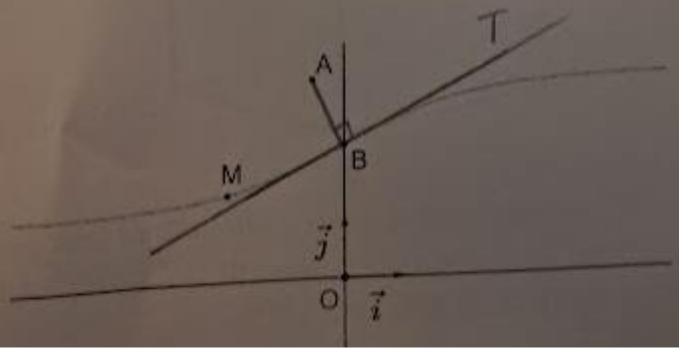
1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0)$
   Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum
   $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a + \frac{b}{1+e^x}$$

où a et b sont des nombres réels. On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de
orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, représentée sur la figure ci-dessous.



*(question A 2 g'(0) =0))

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales, l'une en $+\infty$ d'équation $y = 3$ et l'aut
en $-\infty$ d'équation $y = 1$.
Déterminer les réels a et b.
2. On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 3 - \frac{2}{1 + e^x}$$
et de plus que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout réel x.
   b. Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 0.
   Donner l'équation de la tangente T.
3. Montrer que pour tout x réel,
$$f''(x) = \frac{2e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$$
4. Étudier sur $\mathbb{R}$ la convexité de la fonction f. On donnera les coordonnées de ses évent
points d'inflexions.
5. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq \frac{x}{2} + 2$

Partie C

1. Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.
Pour x réel, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; f(x))$.
Démontrer que $AM^2 = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie A.
2. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.
3. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).
On rappelle que deux droites de coefficients directeurs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.