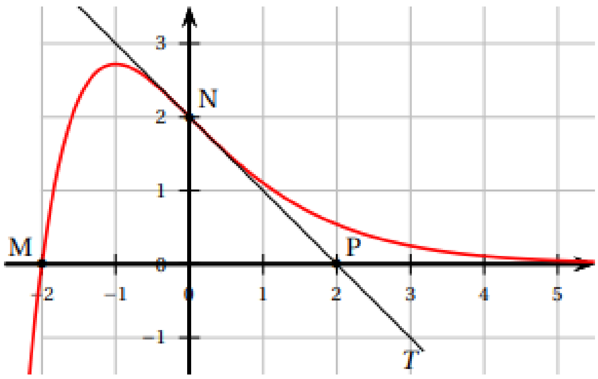
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2; 0) appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

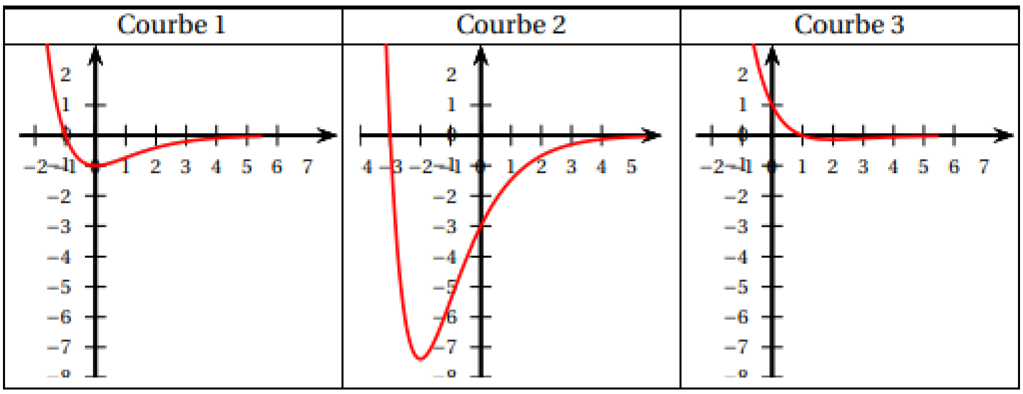


Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.

   b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.



Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction [est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a+b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f.
   Justifier.
3. **a.** Étudier la convexité de f.
   b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t-3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}.$$

   b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.