On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

   b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

   $$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

   $$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)e^x}{(x-1)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

   $$e^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.