Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P): \quad 2x+2y-3z+1=0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(1\,;0\,;1)\ ,\ B(2\,;\ -1\,;\ 1) \text{ et } C(-4\,;\ -6\,;\ 5)\ .$$

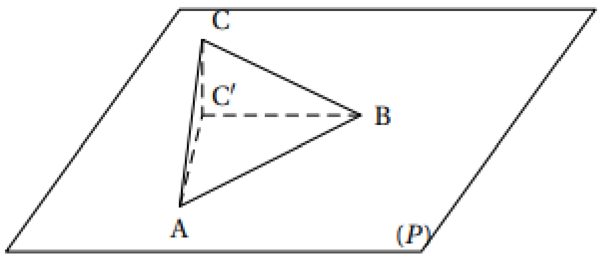
Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $C'(0\,;\ -2\,;\ -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions

   $\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$

   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\-\frac{11}{2}\\4\end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{HC}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. **a.** Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.
   b. Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.
   c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.