Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées (2 ; 5 ; 1).

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points A(−1 ; −1 ; 17), B(4 ; −2 ; 4) et C(1 ; −3 ; 7).

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2. a. Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).
   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x-3y+z-18=0$.

3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite $d$ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$d : \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3t+2 \\ y & = & t+5 \\ z & = & 4t+1 \end{array}\right., \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

   a. Déterminer un vecteur directeur de la droite $d$.
   b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite $d$ avec le plan $\mathscr{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite $\Delta$ qui passe par le point $D$ et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite $\Delta$ et le plan $\mathscr{P}$. On admet que le point F(6 ; −1 ; 3) correspond à cet emplacement.

   Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D.

   Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 $\text{m.s}^{-1}$, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?