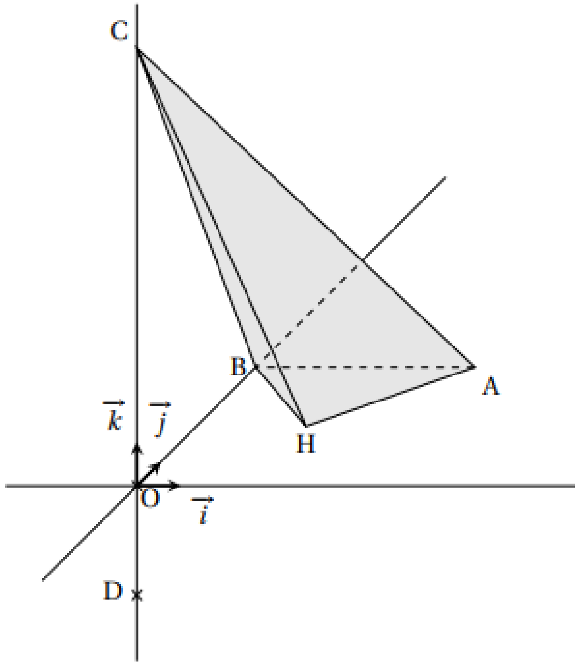
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère les points A(5 ; 5 ; 0), B(0 ; 5 ; 0), C(0 ; 0 ; 10) et D$\left(0\,;\,0\,;\,-\frac{5}{2}\right)$.



1. **a.** Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a. On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. **a.** Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

4. **a.** Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, *où* $\mathscr{B}$ *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).