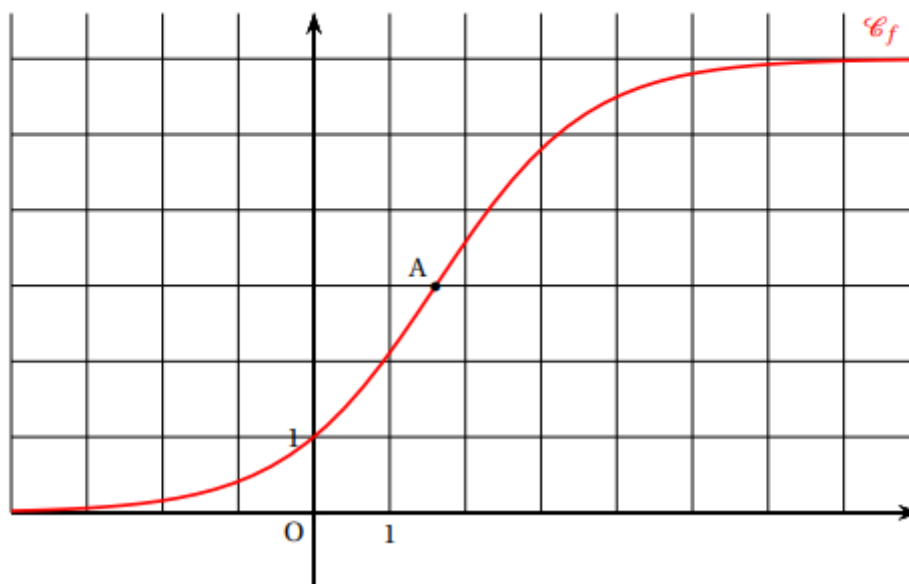


Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5 ; 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde;
- pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{30e^{-x}(5e^{-x} - 1)}{(1 + 5e^{-x})^3}.$$

- a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
- b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; \ln 5]$, on a : $f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$.

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$, où k est une constante réelle.
- Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6 \ln \left(\frac{5}{3} \right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

- Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).
- Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.
- On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h .

- Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.
- Pour tout réel positif m , on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6me^{-x}}.$$

Montrer que pour tout réel positif m , la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.