

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 5 points

Thème : probabilités, suites

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

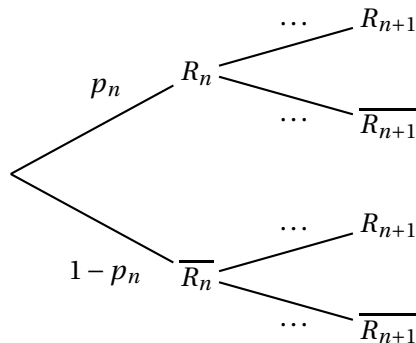
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90% des cas le jour suivant;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70% des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n -ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n . On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n , on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = p_n - 0,75$.

- a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

- c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .
- d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geq 9)$, à 10^{-3} près,

EXERCICE 2 5 points**Thème : géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- le point $A(1; -1; -1)$;
- le plan \mathcal{P}_1 , d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$;
- le plan \mathcal{P}_2 d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$;
- la droite \mathcal{D} de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que \mathcal{D} est la droite d'intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .
3.
 - a. Vérifier que A n'appartient pas à \mathcal{P}_1 .
 - b. Justifier que A n'appartient pas à \mathcal{D} .
4. Pour tout réel t , on note M le point de \mathcal{D} de coordonnées $(1 + 2t; -t; 3 - 2t)$.
On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2 , soit $f(t) = AM^2$.
 - a. Démontrer que pour tout réel t , on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.
 - b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3; -1; 1)$.
5. On note H le point de coordonnées $(3; -1; 1)$.
Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à \mathcal{D} .

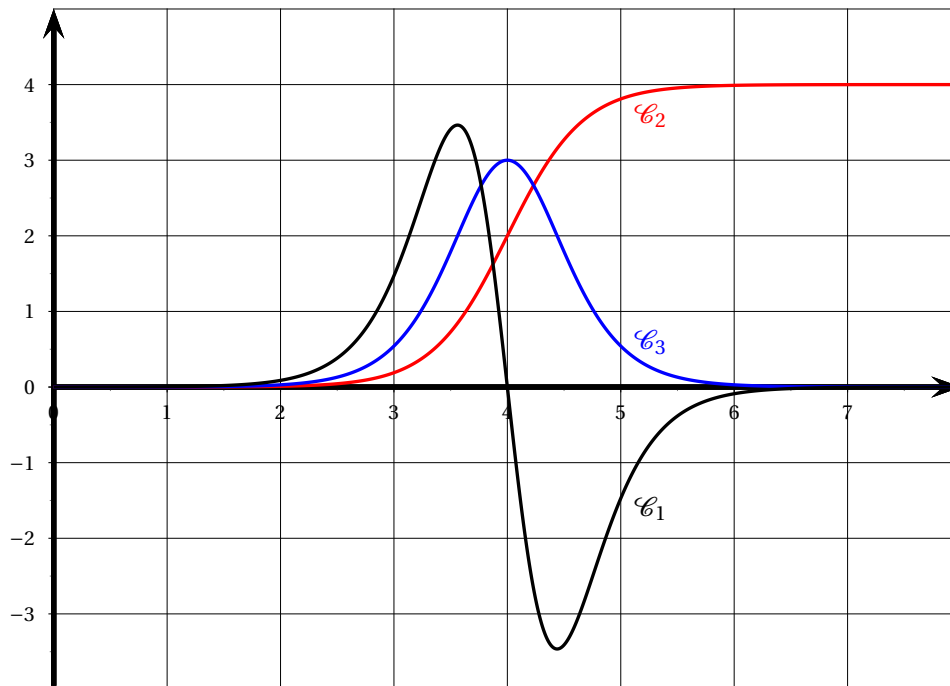
EXERCICE 3 5 points**Thème : étude de fonctions**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f'' .



- Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
- Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_2 au point d'abscisse 4.
- Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_1 .

Partie B

Soit un réel k strictement positif.

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + e^{-kx}}.$$

- Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$,
- Prouver que $g'(0) = k$.
- En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

▷ Calcul formel	
	$g(x) = 4 / (1 + e^{-kx})$
1	$\rightarrow g(x) = \frac{4}{e^{-kx} + 1}$
Simplifier($g''(x)$)	
2	$\rightarrow g''(x) = -4e^{kx} (e^{kx} - 1) \frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3}$

EXERCICE 4 5 points**Thème : suites, fonction logarithme, algorithmique**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1. **Affirmation :** La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

2. **Affirmation :** Toute suite bornée est convergente.

3. **Affirmation :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

4. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

Affirmation : La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.

5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.

On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste L .

```
def mystere(L) :  
    M = L[0]  
    # On initialise M avec le premier élément de la liste L  
    for i in range(len(L)) :  
        if L[i] > M :  
            M = L[i]  
    return M
```

Affirmation : L'exécution de `mystere([2, 3, 7, 0, 6, 3, 2, 0, 5])` renvoie 7.