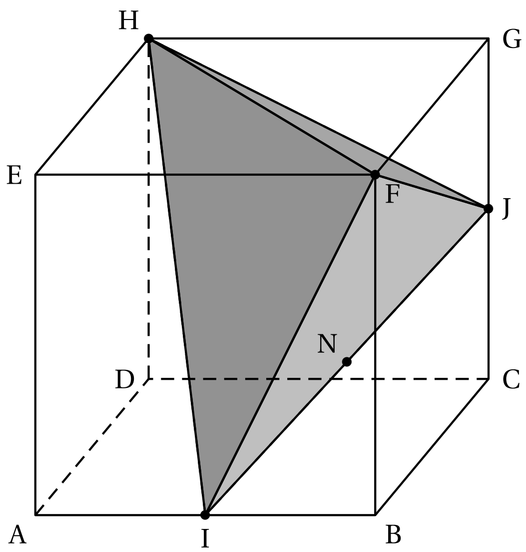
Baccalauréat Métropole Antilles-Guyane

12 septembre 2024 – Jour 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CG].
Le point N est le milieu du segment [IJ].
L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFIJ.
On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.
   En déduire les coordonnées de N.

   b. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{NF}}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{NF}}\begin{pmatrix}0,25\\-0,5\\0,75\end{pmatrix}$$

   c. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{NF}}$ sont orthogonaux.
   On admet que $\text{NF} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

   d. En déduire que l'aire du triangle FIJ est égale à $\dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal au plan (FIJ).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $4x - y - 2z - 2 = 0$.

   c. On note d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par le point H. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

d. Montrer que la distance du point H au plan (FIJ) est égale à $\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$.

e. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

Calculer le volume du tétraèdre HFIJ. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 2 — 5 points

La partie C *est indépendante des parties* A *et* B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\dfrac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\dfrac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

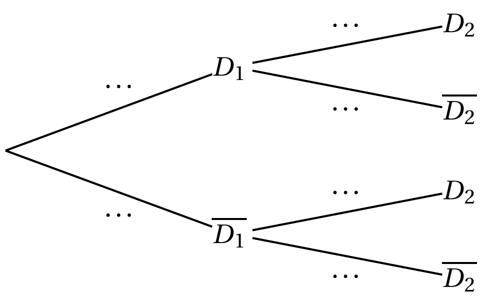
- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement » ;
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'évènement D_n.

On a donc $p_1 = \dfrac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n).

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

   On pourra s'aider d'un arbre.

2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

   b. La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

   b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ?

On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

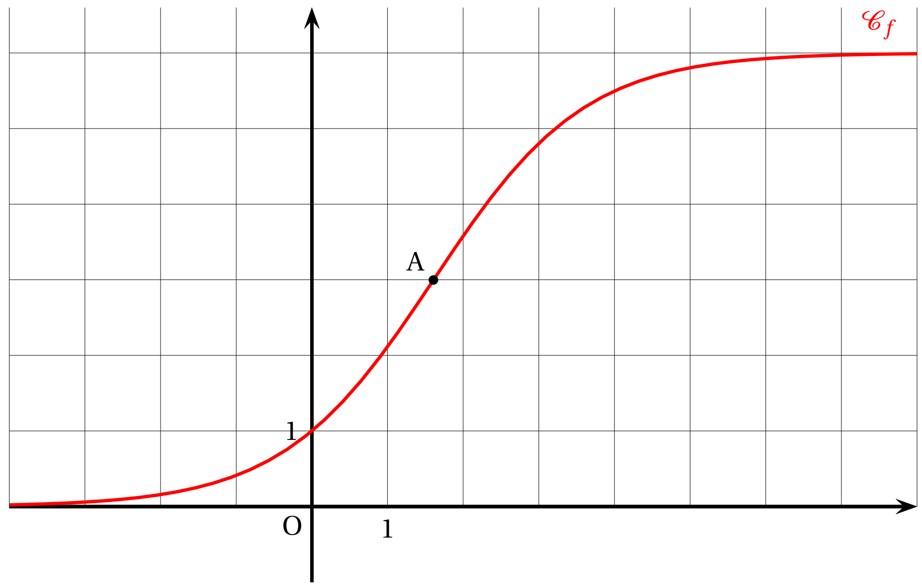
Exercice 3 — 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\ ;\ 3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2}.$$

b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde;
- pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-x}\left(5\,\mathrm{e}^{-x}-1\right)}{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^3}.$$

a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ \ln 5]$, on a : $f(x) \geqslant \dfrac{5}{6}x + 1$.

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right)$, où k est une constante réelle.

a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.

3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

b. Pour tout réel positif m, on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1+6m\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Montrer que pour tout réel positif m, la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

Exercice 4 **5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
  n=0
  u=7
  while u < S :
      n=n+1
      u=1.05*u+3
  return(n)
```

   Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$

   Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$.

3. **Affirmation 3** : dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents.

4. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.
   Affirmation 4 : l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

5. **Affirmation 5** :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$