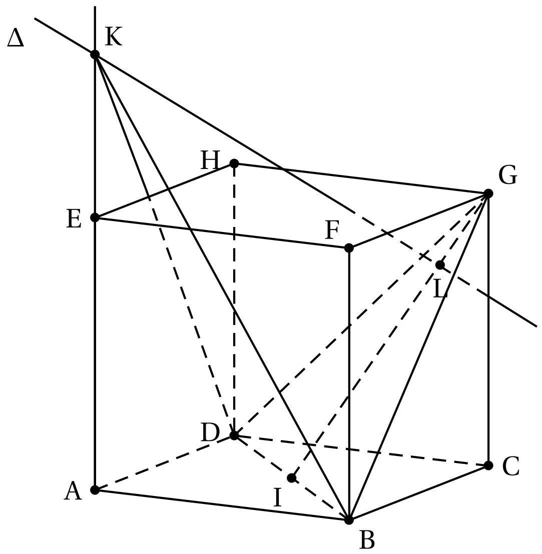
Baccalauréat Métropole Antilles-Guyane

11 septembre 2024

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 6 points

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Préciser les coordonnées des points D, B, I et G.
   Aucune justification n'est attendue.

   b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.
3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

   a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & \dfrac{7}{8} + t\\ y & = & \dfrac{7}{8} + t\\ z & = & \dfrac{3}{4} - t\end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

   b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{13}{8}\right)$.

   c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.
4. **a.** Calculer la distance KL.

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral.

Montrer que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.

On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative a cette base ;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$.

a. Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t' \\ y & = & t' \\ z & = & -t' + a \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{2a-1}{3}\right)$.

c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.

Exercice 2 5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

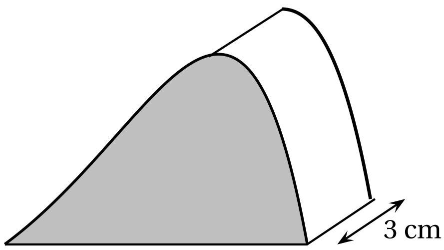


Figure 1

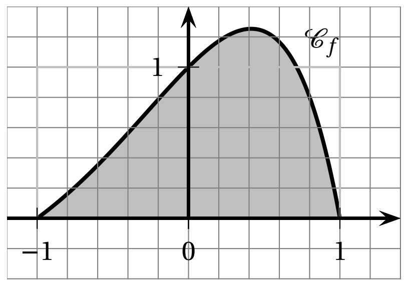


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{x}.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathscr{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).
En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.
Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01\ ;\ +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01\ ;\ +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

b. Montrer que, pour tout $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01\,;\,+\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01\,;\,1,2[$.
On donne $\alpha \approx 0,757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Exercice 3 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.
Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```python
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 4 — 4 points

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. *On arrondira les résultats à* 10^{-3} *près.*
   a. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.
   b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

   Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{100}$ suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.

   Montrer que : $s = 10\sigma$.
3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
   a. Montrer que cette condition est équivalente à :

   $$P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant 0{,}1.$$

   b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.